

Light on Optics and Optometry
Firenze – 28 gennaio 2022

Storia delle equazioni di Maxwell

Giulio Peruzzi
Dipartimento di fisica e astronomia
Università di Padova



Copyright, 2021-2022© Giulio Peruzzi

Originariamente due linee di ricerca

1. Elettrodinamica continentale (Ampère, Gauss, Weber, Fechner, Franz Neumann ...): azione a distanza.
2. Elettrodinamica britannica (Faraday, Thomson, Maxwell): azione mediata dal campo.

Elettrodinamica continentale

Gauss (1835) \Rightarrow Fechner (1845), Weber (1846-1848) (due fluidi di carica + e - che fluiscono in direzione opposta).

Scuola francese (Laplace, Poisson, Biot, Savart, Ampère) e tedesca (Franz Neumann): funzione potenziale.

Carl Neumann (1871), Clausius (1876) e Hall (1879): un solo portatore.

Gauss (1845), Weber, Kirchhoff (1848-1857), Riemann (1858 [1867]), C. Neumann (1868 [1880]), Lorenz, Lienard, Wiechert: potenziali scalari e vettoriali ritardati.

1) Concezione sostanzialistica dell'elettricità: carica elettrica e correnti come nozioni primitive.

2) Azioni elementari tra cariche: azioni a distanza.

3) Riduzione dell'elettromagnetismo alla meccanica tramite un principio di minimo dell'azione (von Helmholtz, 1870-1886).

Weber: "la prima teoria dell'elettrone"

[Whittaker, *A History of Theories of Aether and Electricity* (London, 1910)]

La corrente elettrica è la risultante del moto di due fluidi orientati in direzioni opposte. I fluidi sono composti da particelle con carica positiva e negativa. La legge che esprime le interazioni tra queste particelle spiega tutti i fenomeni elettrici noti e unifica elettrostatica e elettrodinamica. Le azioni elettromagnetiche dipendono da una forza che si esercita a distanza tra particelle materiali:

$$F_{ee'} = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c_W^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c_W^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right],$$

dove r è la distanza relativa tra le due cariche e e e' . Il primo termine è la forza di Coulomb e gli altri due, che dipendono dalla velocità e dalla accelerazione relative, permettono di tener conto degli effetti elettrodinamici e delle induzioni elettromagnetiche. [Weber]

Due elementi di elettricità in uno stato di moto relativo si attraggono o respingono reciprocamente, ma non nello stesso modo di quando si trovano a riposo reciproco. [Gauss, 1835]

Avrei sicuramente già pubblicato da molto tempo le mie ricerche se non fosse stato che al momento in cui le abbandonai avevo fallito nel trovare quella che consideravo la chiave di volta: cioè la derivazione di forze addizionali - che devono essere aggiunte alla azione mutua di particelle elettriche a riposo quando queste sono in moto relativo - dall'azione che è propagata non istantaneamente ma in un certo tempo come nel caso della luce. [Gauss a Weber, 1845]

Michael Faraday (1791-1867)

1844 - *A speculation Touching Electric Conduction and the Nature of Matter* lettera a Richard Taylor.

Un paradosso

“Gli elementi fondamentali su cui si struttura la conoscenza della natura sono i fatti, ed è sempre saggio distinguere, per quanto è nelle nostre possibilità, i fatti dalla teoria”.

La dottrina atomica, accettando la descrizione della materia come un insieme di elementi discreti immersi in un continuo, è dai fatti messa in difficoltà.

Nella dottrina atomica infatti “lo spazio penetra in tutti gli aggregati di materia da ogni direzione a formare una sorta di rete, solo che, invece di essere composto di maglie, presenta al suo interno delle celle che isolano ciascun atomo dagli atomi vicini, mantenendo in tal modo solo per sé la proprietà della continuità”.

Ma allora come si spiegano le diverse proprietà di conduzione che si manifestano nelle diverse sostanze?

Solo ammettendo che nel caso dei conduttori la rete spaziale continua conduca, e nel caso degli isolanti non conduca.

Un paradosso a cui inevitabilmente conduce la teoria atomica inserita nel contesto newtoniano dove risulta difficile pensare a forze che si sviluppano indipendentemente da quel “qualcosa di privilegiato che viene usualmente chiamato la materia”.

“Ma è senz’altro più difficile ancora, se non addirittura impossibile, pensare o immaginare questa materia indipendentemente dalle azioni da essa esercitate”.

La soluzione del paradosso

La proposta di Ruggero Boscovich (1711-1787) - gli atomi come puri centri di forza - risulta più conforme ai fatti di quanto non lo sia la dottrina atomica.

Faraday quindi considera “la materia ovunque”, un continuo dove “non devono essere introdotte distinzioni tra gli atomi che la compongono e l’ipotetico spazio intermedio [...]”

Sono le forze distribuite intorno ai centri di forza a far loro assumere le proprietà di atomi di materia”.

“La concezione della materia appena stabilita sembrerebbe implicare necessariamente la conclusione che la materia riempia tutto lo spazio o, perlomeno, tutto quello spazio su cui si esercita la gravitazione [...] infatti la gravitazione è una proprietà della materia che dipende da una certa forza, ed è proprio questa forza che costituisce la materia.

Secondo questo punto di vista la materia non è solo penetrabile, ma si può in un certo senso affermare che ogni atomo si estende in tutto il sistema solare, conservando però il suo centro di forza”.

Nei dieci anni successivi Faraday matura l'idea di affidare a un "campo unificato di forze" [*echi della scienza romantica*], che ricoprono l'intero spazio, la descrizione dei fenomeni elettrici, magnetici, ottici, chimici e gravitazionali.

Accettando l'idea che le linee di forza siano enti caratterizzabili in termini fisici e dinamici, si è condotti ad abbandonare non solo la nozione di forza a distanza, ma anche quella di propagazione istantanea delle azioni fisiche.

1846 - *Thoughts on Ray-vibrations.* (Letter to Richard Phillips, 15 April 1846)
Philosophical Magazine, S.3, Vol 28, N188, May 1846.)

La teoria ondulatoria della luce cerca di spiegare le proprietà "*della radiazione e dei fenomeni radianti*" come vibrazioni in un mezzo etereo, ma se si assume che quelle vibrazioni in realtà hanno luogo direttamente nelle linee di forza si può "*rinunciare all'etere*".

D'altra parte "*la presenza di un cambiamento a un'estremità della linea di forza fa facilmente supporre un cambiamento conseguente all'altra estremità*".

(radiazione) Ecco allora che siccome "*la propagazione della luce e quindi, probabilmente, di tutta l'azione radiante, impiega tempo, perché una vibrazione della linea di forza possa far parte dei fenomeni della radiazione occorre che anch'essa impieghi tempo*".

Ma anche la trasmissione dell'elettricità in un conduttore, che sperimentalmente si osserva avvenire con una velocità *"uguale, se non maggiore, a quella della luce"*, può essere assimilata a vibrazioni delle linee di forza.

(materia) E, visto che anche la materia può essere dissolta nelle linee di forza, allo stesso modo la gravitazione, benché non si disponga di evidenze sperimentali, potrebbe propagarsi con una velocità finita.

Sono solo congetture, *"ombre di una speculazione o come quelle immagini mentali che servono, per un certo tempo, come guida al pensiero e alla ricerca"*.

James Clerk-Maxwell

Nasce a Edimburgo il 13 giugno del 1831

1842-50 Formazione a Edimburgo

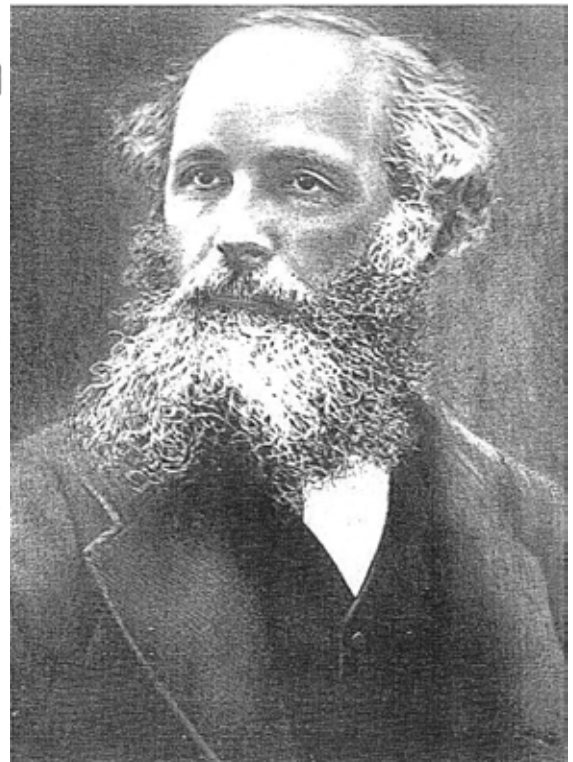
1850-54 Trinity College di Cambridge

**1856-60 Cattedra di Filosofia Naturale al
Marischal College di Aberdeen**

**1860-65 Cattedra di Filosofia Naturale al
King's College di Londra
(dimissioni)**

**1871 Cattedra di Fisica Sperimentale e
direzione dell'annesso laboratorio
(Devonshire, poi Cavendish, 1874)**

Muore il 5 novembre del 1879. [48 anni!]



ELETTRICITÀ, MAGNETISMO E OTTICA (1849-1879)

***On Faraday's Lines of Force*, 1855-1856**

***On Physical Lines of Force*, 1861-1862**

***On Elementary Relations of Electrical Quantities* (con Fleeming Jenkins), 1863**

***A Dynamical Theory of Electromagnetic Field*, 1865 (1864)**

***On a Method of Making a Direct Comparison of Electrostatic with electro-magnetic force; with a Note on Electromagnetic Theory of Light*, 1868**

***A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873**

***An Elementary Treatise on Electricity*, 1881 (postumo, a cura di W. Garnett)**

MAXWELL E LA TEORIA CINETICA DEI GAS (1859-1879)

- 1. *On the stability of the motion of Saturn's Rings* (1855-59)**
- 2. *Illustration of the dynamical theory of gases* (1860)**
- 3. *On the viscosity or internal friction of air and other gases* (1865-66)**
- 4. *On the dynamical theory of gases* (1867)**
- 5. *On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature* (1878) [radiometro]**
- 6. *On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material point* (1879)**

Man mano che procedevo nello studio di Faraday, mi accorgevo che il suo metodo di concepire i fenomeni era anche di tipo matematico, sebbene non si esprimesse nella forma convenzionale dei simboli matematici. E scoprivo anche che questi metodi erano suscettibili di essere espressi nelle usuali forme della matematica e in tal modo confrontabili con quelli dei matematici dichiarati.

Per esempio, Faraday, con la sua immaginazione, vedeva linee di forza che attraversavano l'intero spazio, dove i matematici vedevano centri di forza che si attiravano a distanza; Faraday vedeva un mezzo dove questi non vedevano altro che distanza; Faraday cercava la sede dei fenomeni nelle azioni reali che si verificano nel mezzo, mentre questi erano appagati dall'averla trovata in una potenza dell'azione a distanza impressa sui fluidi elettrici.

Quando sono riuscito a tradurre in forma matematica quelle che consideravo fossero le idee di Faraday, ho trovato che in generale i risultati dei due metodi coincidevano, poiché gli stessi fenomeni venivano spiegati e le stesse leggi di azione dedotte da entrambi i metodi, ma che i metodi di Faraday assomigliavano a quelli nei quali si inizia con il tutto e si arriva alle sue parti per via analitica, mentre i metodi matematici usuali erano fondati sul principio di iniziare con le parti e costruire l'intero per via sintetica.

[Maxwell, *Treatise*, Prefazione alla prima ed., p. ix (Dover)]

FARADAY'S LINES OF FORCE 1855-1856

Lo stato presente della scienza elettrica - scrive Maxwell nell'introduzione - sembra particolarmente sfavorevole alla speculazione.

Le leggi della distribuzione di elettricità sulle superfici dei conduttori sono state analiticamente dedotte dagli esperimenti [elettrostatica];

alcune parti della teoria matematica del magnetismo sono stabilite, mentre in altre parti mancano ancora dati sperimentali;

la teoria della conduzione del galvanismo [correnti elettriche] e quella delle mutue attrazioni dei conduttori [esperienze di Ørsted e Ampère] sono state ridotte a formule matematiche, senza però poter essere messe in relazione con le altre parti della scienza elettrica.

Nessuna teoria elettrica può oggi essere proposta, a meno che non riesca a dimostrare la connessione non solo tra elettricità a riposo e corrente elettrica, ma anche tra le attrazioni e gli effetti induttivi dell'elettricità in entrambi questi stati [induzioni elettrostatiche ed elettromagnetiche].

Una tale teoria deve soddisfare accuratamente le leggi, la cui espressione matematica è nota, e deve fornire i mezzi per calcolare gli effetti nei casi limite dove le formule conosciute sono inapplicabili.

Perciò, per apprezzare quali siano le richieste della scienza elettrica, lo studioso deve familiarizzarsi con una notevole parte della matematica più intricata, la cui sola memorizzazione interferisce materialmente con gli ulteriori progressi.

Quindi il primo procedimento per un efficace studio della scienza elettrica deve essere quello volto alla semplificazione e riduzione dei risultati delle precedenti indagini al fine di ottenere una forma nella quale la mente possa afferrarle.

Faraday's Lines of Force: il ruolo dell'analogia

“L'analogia fisica non è altro che una somiglianza parziale tra le leggi relative a un certo settore fenomenologico e quelle relative a un altro, una somiglianza che permette di utilizzare le leggi del primo settore come illustrazioni di quelle del secondo e viceversa.”

L'analogia “più universale” su cui si fondano “tutte le scienze matematiche” è quella fra le leggi fisiche e le leggi dei numeri. All'altro estremo stanno analogie particolari come l'analogia parziale tra la rifrazione della luce nel passaggio tra due mezzi diversi e la traiettoria di una particella che si muove in uno spazio in cui agiscono forze intense, e l'analogia - “di più vasta portata”, ma sempre “basata su una somiglianza formale” - tra la luce e le vibrazioni trasverse di un mezzo elastico.

Faraday's Lines of Force: il ruolo dell'analogia

✓ **W. Thomson (1824-1907), *On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity*, 1842, analogia tra fenomeni elettrostatici (a distanza) e conduzione del calore (per contatto):**

sorgente di calore \Rightarrow centro di attrazione

flusso di calore \Rightarrow effetto accelerante di attrazione

temperatura \Rightarrow potenziale.

✓ **W. Thomson, *On the mathematical theory of electricity in equilibrium*, 1846, generalizzazione delle analogie fisiche dei fenomeni elettrostatici in linea con le idee di Faraday (Liouville).**

✓ **W. Thomson, *On a mechanical representation of electric, magnetic and galvanic forces*, 1847 (Stokes) somiglianza tra processi elettromagnetici e stati di tensione di un corpo elastico. [Opere di Kelvin, UTET, p. 351 e ss., cf. in particolare p. 353]**

Faraday's Lines of Force: necessità di introdurre i vettori

Una nuova analogia tra fenomeni e.m. e flusso di un *fluido incompressibile* attraverso "tubuli" di sezione variabile: *alla direzione data dalle linee di forza si aggiunge l'intensità della forza (rappresentata dalla velocità del fluido variabile con la sezione dei tubuli)*. [$P = Av$]

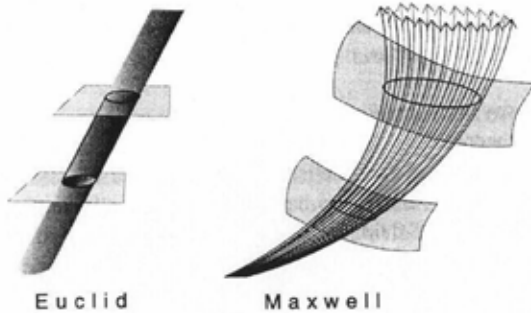


Fig. 2.4. Alternative worlds: the "cylinder" in Euclid and in Maxwell.

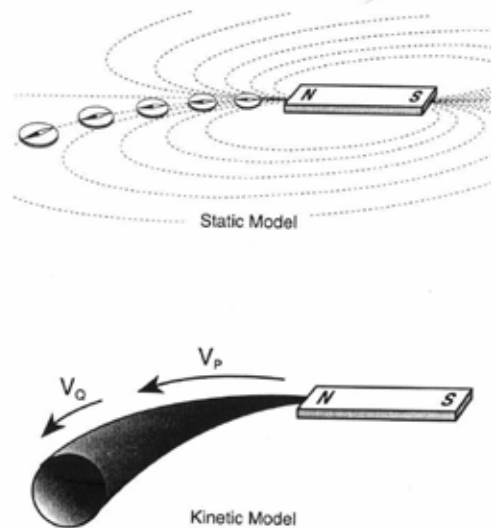


Fig. 2.3. Defining the lines of force (Static Model), and tubes of flow (Kinetic Model).

1. **Modello geometrico di Faraday + idrodinamica** permettono a Maxwell di unificare fenomeni elettrici, magnetici e galvanici individuando per ognuno di questi ambiti le grandezze caratteristiche ("intensità e quantità", in seguito "forze e flussi") che stanno tra loro in opportune relazioni di proporzionalità (tramite costanti legate al mezzo in cui hanno luogo i fenomeni).
2. **Nella seconda parte (On Faraday's "electro-tonic state")**: i fenomeni di induzione elettromagnetica. **Applicazione dei risultati delle teorie del potenziale (interpretati come densità diffuse di energia)**.

Sulle grandezze che caratterizzano i fenomeni elettrici e magnetici.

Per capire cosa abbia in mente Maxwell basta ricordare le grandezze a cui si riferisce per introdurre la distinzione tra “quantità (flusso)” e “intensità (forza)”: la densità di corrente J e la forza elettromotrice E .

J e E sono, rispettivamente, una “quantità” e una “intensità”, connesse dalla relazione $E = K J$, dove K esprime la “resistenza” del mezzo (“legge di Ohm”).

In modo analogo Maxwell tratta il caso della relazione tra quelli che in notazione moderna sono i *campi magnetici* B (“quantità”) e H (“intensità”), la cui relazione è $H = k B$, dove la “resistenza” k che li unisce non è altro che il reciproco di quello che oggi viene chiamata “*permeabilità magnetica*”.

Le “quantità [flussi]” sono legate - come scrive Maxwell - al “numero di linee di forza che attraversano una data superficie”, sono cioè grandezze agenti attraverso superfici, mentre le “intensità [forze]” sono legate al “potere di superare una certa resistenza”, agiscono cioè lungo linee.

Sono queste grandezze, mutate dall’analogia geometrica delle linee di forza e dai caratteri idrodinamici del modello, a costituire un primo insieme incompleto di quelle che saranno le variabili fondamentali per la descrizione successiva dei campi elettrici e magnetici, mentre le costanti che individuano la resistenza del mezzo sono quelle oggi note come *conducibilità elettrica, permeabilità elettrica e permeabilità magnetica.*

“penso che [questa formulazione matematica] non contenga neanche l’ombra di una vera teoria fisica; in realtà, il suo principale merito come strumento temporaneo di ricerca è proprio che essa, neanche in apparenza, non rende conto di alcunché”.

Perché arrampicarsi sugli specchi quando si dispone già d’una teoria fisica, quella di Weber, che tratta in modo matematicamente elegante e completo tutti gli argomenti di questo articolo?

Ebbene, risponde Maxwell, “penso che sia positivo disporre di due modi diversi di guardare alla stessa fenomenologia, e ammettere che esistono due modi di guardare ad essa”, anche perché la comprensione attuale “delle azioni elettriche è ben lungi dall’essere chiara. La speranza è quella di poter realizzare, sulla scorta delle informazioni che provengono da questo primo modello non fisico e sulla base di idee mutate dalle leggi dei solidi elastici e dal moto dei fluidi viscosi, un modello fisico in linea con l’approccio di Faraday.”

ON PHYSICAL LINES (1861-62)

“Ora mi propongo di esaminare i fenomeni magnetici da un punto di vista meccanico, e determinare quali tensioni in, o moti di, un mezzo siano in grado di produrre i fenomeni meccanici osservati.

Se, per mezzo della stessa ipotesi, possiamo collegare i fenomeni dell’attrazione magnetica con i fenomeni elettromagnetici e con quelli delle correnti indotte, avremo trovato una teoria che, anche se non vera, potrà essere dimostrata erronea solo con esperimenti che allarghino grandemente le nostre conoscenze di questa parte della fisica”.

Cosa contiene l'articolo?

Due riferimenti

✓ Rankine (anni '40, *vortici molecolari rotanti con velocità proporzionali alla temperatura*), Thomson (1856, *accoppiamento tra vibrazioni dell'etere luminifero e rotazioni di vortici molecolari di un mezzo materiale per spiegare l'effetto magneto-ottico*)

Diviso in quattro parti

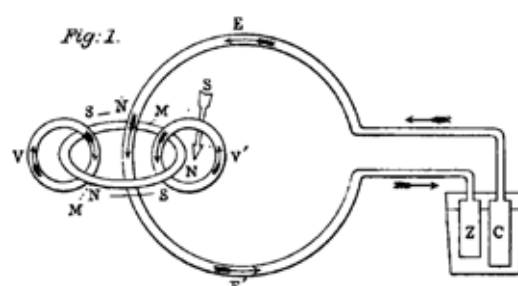
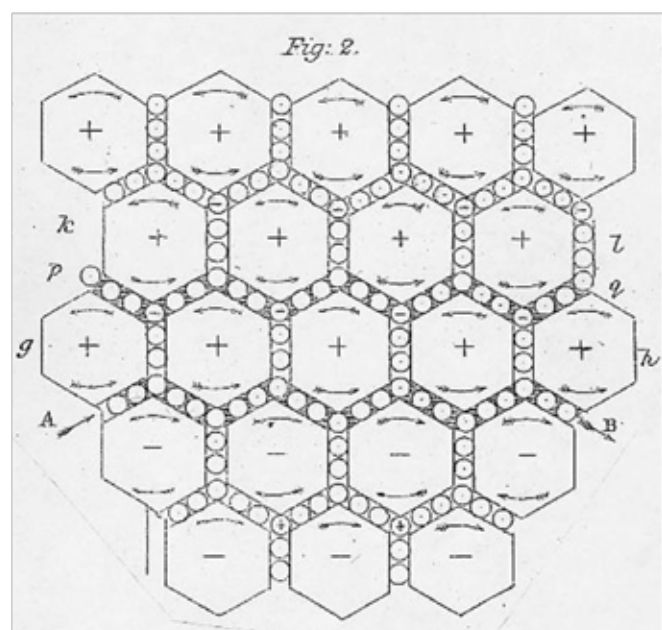
✓ *Nelle prime due parti* illustra il modello. Ricava quindi le equazioni generali e interpreta *la funzione elettrotonica come momento generalizzato del sistema di vortici*.

✓ *Nella terza parte* introduce l'idea che la sostanza nelle celle abbia proprietà elastiche, dà un'interpretazione dell'elettricità e propone l'unificazione tra e.m. e ottica. La *quarta parte* contiene alcune applicazioni.

On Physical Lines

- Asse di rotazione dei vortici paralleli alla direzione delle forze magnetiche punto per punto.
- Velocità angolari dei vortici proporzionali alle intensità locali delle *forze magnetiche*.
- Le pareti sono costituite da celle più piccole: la "materia dell'elettricità". Modello meccanico dei vortici e cuscinetti a sfera.

Potenziale vettore: momento generalizzato del sistema dei vortici definito punto per punto, per cui la sua derivata parziale rispetto al tempo dà la forza e.m. (in analogia con mv di Newton la cui derivata rispetto a t è F): $E = \partial A / \partial t$.



III parte

Sembra che il lavoro dovesse constare solo delle prime due parti, ma durante l'estate del 1861 Maxwell elabora ulteriormente il modello: la sostanza rotante nelle celle ha proprietà elastiche (ripresa di idee di Faraday, 1845-46, e Thomson, 1856).

Su questa base Maxwell propone un'interpretazione della carica elettrica nei conduttori e negli isolanti (introduzione del termine di spostamento nelle sue equazioni), e può dare finalmente veste quantitativa alla congettura di Faraday di una «propagazione del campo nel mezzo elastico».

La velocità del movimento ondulatorio trasverso nel nostro mezzo ipotetico, calcolata dagli esperimenti elettromagnetici di Kohlrausch e Weber, concorda in modo così perfetto con la velocità della luce calcolata dagli esperimenti ottici di Fizeau, che ci sarebbe difficile non inferire che la luce consista nei moti ondulatori trasversi dello stesso mezzo che è la causa dei fenomeni elettrici e magnetici. [l'etere luminifero è equivalente all'etere elettromagnetico]

1863 - *On Elementary Relations of Electrical Quantities*, scritto con Fleeming Jenkin

Questo articolo contiene due fondamentali novità:

- 1. la notazione dimensionale, [L], [M] e [T];**
- 2. l'illustrazione di cinque diverse classi di esperimenti dai quali ricavare la misura della velocità della luce. Uno di questi esperimenti verrà descritto nell'articolo del 1868 (misure per definire l'unità di misura della resistenza elettrica).**

Grandezza	Unità esu	Unità emu
e (carica elettrica)	$[L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}]$	$[L^{1/2} M^{1/2}]$
V (potenziale elettrico)	$[L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}]$	$[L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}]$
I (corrente elettrica)	$[L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}]$	$[L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}]$
R (resistenza elettrica)	$[L^{-1} T]$	$[L T^{-1}]$

Per ogni grandezza il rapporto tra la sua dimensione in esu e quella in emu ha le dimensioni di una velocità elevata a un esponente intero (negativo o positivo)

A dynamical theory of the electromagnetic field (1865)

La teoria che propongo può quindi essere chiamata

una teoria del campo elettromagnetico, perché ha che fare con lo spazio nelle vicinanze dei corpi elettrici o magnetici,

e può essere chiamata

una teoria dinamica, perché assume che in quello spazio vi sia materia in movimento dalla quale vengono prodotti i fenomeni elettromagnetici osservati [...]

In una precedente occasione [On the physical lines of force] ho cercato di descrivere un particolare tipo di movimento e un particolare tipo di tensione, costruiti in modo tale da rendere conto dei fenomeni.

Nel presente lavoro evito qualunque ipotesi di questo genere, e nell'usare parole quali "momento elettrico" e "elasticità elettrica" in riferimento ai fenomeni noti dell'induzione di correnti e della polarizzazione dei dielettrici intendo semplicemente indirizzare l'immaginazione del lettore ai fenomeni meccanici che lo aiuteranno a comprendere quelli elettrici. Tutte le proposizioni siffatte nel presente articolo devono essere considerate come illustrative, e non come esplicative.

Ma nel parlare di energia del campo voglio essere preso alla lettera. Tutta l'energia è identica all'energia meccanica, sia che esista sotto forma di moto o di elasticità, sia in qualsiasi altra forma.

[§ 73]

Approccio "assiomatico" indipendente dai modelli particolari (motivato dalla proliferazione dei modelli eterei - almeno 12 - e dalla necessità di trovare "relazioni generali" unificanti il più vasto numero di fenomeni)

- 1. analisi delle questioni legate all'energia (dalla conservazione dell'energia alle forze e non viceversa)**
- 2. impiego di concetti e strumenti mutuati dalla geometria**
- 3. l'analogia con sistemi dinamici macroscopici**

Risultati:

- A. III parte: le 20 [!] "equazioni di Maxwell".**
- B. IV parte: tentativo di unificare e.m. e gravità.**
- C. VI parte: (*Electromagnetic Theory of Light*) equazioni d'onda per la propagazione dei campi sotto forma di onde trasverse.**

Nota sull'attrazione della gravitazione [ultima sezione della IV parte]

Quindi l'assunzione che la gravità provenga dall'azione del mezzo circostante, nel modo indicato, conduce alla conclusione che ogni parte di questo mezzo possieda, quando è indisturbata, un'enorme energia intrinseca, e che la presenza di corpi densi influenzi il mezzo in modo da ridurre questa energia là dove ci sia una attrazione risultante.

Siccome sono incapace di comprendere in qual modo un mezzo possa avere simili proprietà, non proseguirò ulteriormente in questa direzione alla ricerca delle cause della gravità.

(70) In these equations of the electromagnetic field we have assumed twenty variable quantities, namely,

For Electromagnetic Momentum	F	G	H
„ Magnetic Intensity	α	β	γ
„ Electromotive Force	P	Q	R
„ Current due to true Conduction	p	q	r
„ Electric Displacement	f	g	h
„ Total Current (including variation of displacement)	p'	q'	r'
„ Quantity of Free Electricity	e		
„ Electric Potential	Ψ		

Between these twenty quantities we have found twenty equations, viz.

Three equations of Magnetic Force	(B)
„ Electric Currents	(C)
„ Electromotive Force	(D)
„ Electric Elasticity	(E)
„ Electric Resistance	(F)
„ Total Currents	(A)
One equation of Free Electricity	(G)
„ Continuity	(H)

Equations of Magnetic Force,

$$\left. \begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B).$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (C).$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{I}_{\text{tot}}$$

Equations of Electromotive Force.

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\psi$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (D).$$

Equations of Electric Elasticity,

$$\left. \begin{aligned} P &= kf \\ Q &= kg \\ R &= kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (E).$$

$$\mathbf{E} = k \mathbf{D}$$

Equations of Electric Resistance,

$$\left. \begin{aligned} P &= -\rho p \\ Q &= -\rho q \\ R &= -\rho r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (F).$$

$$\mathbf{E} = -\rho \mathbf{I}_{\text{true}}$$

$$\mathbf{I}_{\text{tot}} = \mathbf{I}_{\text{true}} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

$$\left. \begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A).$$

Equation of Free Electricity,

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0 \dots\dots\dots (G).$$

$$e + \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\partial e / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{I}_{\text{true}} = 0$$

Equation of Continuity,

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0 \dots\dots\dots (H).$$

EQUAZIONI DI MAXWELL (1873)	
(A) Induzione magnetica	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
(B) Forza elettromotrice	$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi$
(C) Forza meccanica	$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E} - m\nabla\Omega$
(D) Magnetizzazione	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J}$
(E) Correnti elettriche	$4\pi\mathbf{I} = \nabla \times \mathbf{H}$
(F) Spostamento elettrico	$\mathbf{D} = (1/4\pi)K\mathbf{E}$
(G) Corrente di conduzione	$\mathbf{I}' = C\mathbf{E}$
(H/I) Correnti vere	$\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
(J) Densità di volume elettrica	$e = \nabla \cdot \mathbf{D}$
(L) Magnetizzazione indotta	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
(-) Densità di volume magnetica	$m = \nabla \cdot \mathbf{J}$
(-) Se \mathbf{H} deriva da potenziale	$\mathbf{H} = -\nabla\Omega$

EQUAZIONI DI MAXWELL OGGI	
$\nabla \cdot \mathbf{D}$	$= \rho$ ($\rho \equiv e$ di JCM)
$\nabla \cdot \mathbf{B}$	$= 0$
$\nabla \times \mathbf{E}$	$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H}$	$= 4\pi \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ ($\mathbf{j} \equiv \mathbf{I}'$ di JCM)
\mathbf{F}	$= e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (forza di Lorentz)
\mathbf{D}	$= 1/(4\pi)K\mathbf{E}$
\mathbf{B}	$= \mu\mathbf{H}$
\mathbf{j}	$= \sigma\mathbf{E}$ ($\sigma \equiv C$ di JCM)

Si è dimostrato che entrambe queste teorie sono in grado di spiegare non solo i fenomeni sulla base dei quali erano state originariamente costruite, ma anche altri fenomeni, che non erano stati considerati o che erano forse sconosciuti all'epoca; ed entrambe sono indipendentemente arrivate allo stesso risultato numerico che fornisce la velocità assoluta della luce in termini di quantità elettriche.

Che teorie apparentemente opposte in modo così fondamentale potessero avere un così ampio campo di verità comune è un fatto del quale non potremo apprezzare pienamente l'importanza filosofica fino a quando non avremo raggiunto una sommità scientifica dalla quale si possa percepire la vera relazione tra ipotesi a tal punto diverse.

[Maxwell, 1870: prolusione al convegno annuale della BAAS a Liverpool]

[Feynman's Nobel Lecture, 1965]

Vorrei un attimo fermarmi a questo punto e fare un'osservazione. Il fatto che l'elettrodinamica possa essere scritta in così tanti modi - le equazioni differenziali di Maxwell, vari principi di minimo con i campi, principi di minimo senza campi, tutti modi di tipo diverso – era qualcosa che sapevo, ma che non ho mai capito.

Mi è sempre sembrato strano che le leggi fondamentali della fisica, una volta scoperte, possano apparire in così tante diverse forme che a prima vista non sembrano identiche, ma che con un po' di gioco matematico si riesca a mostrarne le relazioni.

Un esempio di questo è l'equazione di Schrödinger e la formulazione di Heisenberg della meccanica quantistica.

Non so perché sia così - rimane un mistero, ma era qualcosa che avevo imparato dall'esperienza. C'è sempre un altro modo di dire la stessa cosa che non assomiglia affatto al modo in cui l'hai detta prima. Di questo fatto non conosco la ragione. Penso sia in qualche modo una rappresentazione della semplicità della natura.

Una cosa come la legge dell'inverso del quadrato è proprio giusto quella che deve essere rappresentata dalla soluzione dell'equazione di Poisson, che per questo è un modo assai diverso di dire la stessa cosa che non assomiglia affatto al modo in cui l'hai detta prima. Non so cosa significhi il fatto che la natura scelga queste forme curiose, ma forse questo è un modo per definire la semplicità. Forse una cosa è semplice se si può descriverla pienamente in molti modi diversi senza sapere immediatamente che si sta descrivendo la stessa cosa.

Richard P. Feynman (1966) – “The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics”, *Science*, vol. 153, pp. 699-708, p. 702.

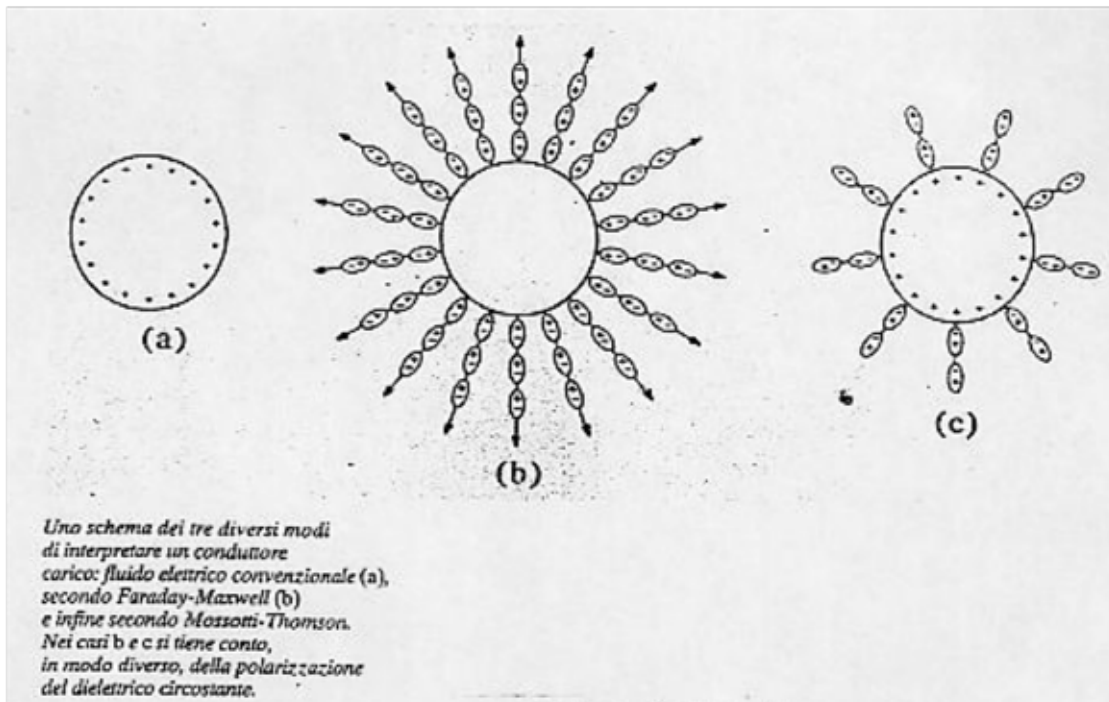
Teorie di ciò che è conosciuto che sono descritte da differenti idee fisiche possono essere equivalenti in tutte le loro predizioni e quindi scientificamente indistinguibili.

Tuttavia, esse non sono psicologicamente identiche quando si sta tentando di muoversi da quella base nel non conosciuto. Perché differenti visioni suggeriscono diversi tipi di modificazioni che potrebbero essere fatte, e quindi non sono equivalenti nelle ipotesi che si generano quando si tenta di comprendere ciò che non è ancora compreso.

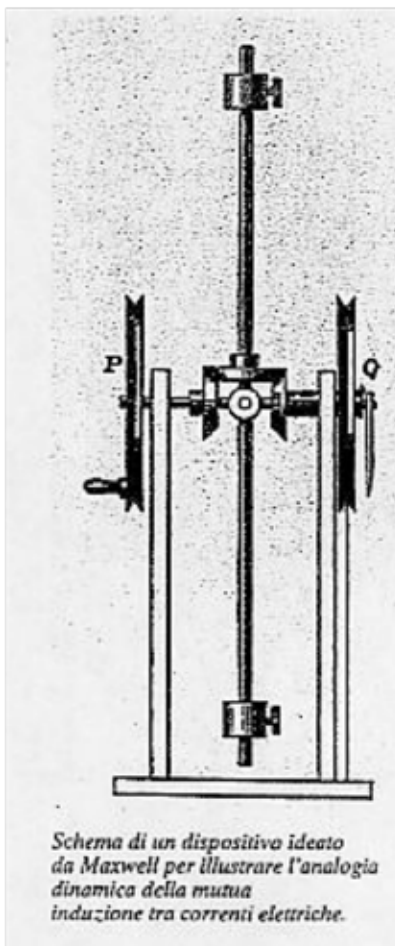
Richard P. Feynman (1966), *Ibid.*, p. 708.

Treatise, 1873

- i. Gli aspetti problematici: la carica elettrica**
- ii. Introduzione dei vettori e degli operatori vettoriali (∇ - nebel/nabla “convergenza”, “rotore”, “gradiente”)**
- iii. “Geometria della posizione” (topologia):
Benedict Listing, 1847; Gauss, 1833 ...**
- iv. Formulazione dinamica generalizzata (dai lavori di Lagrange, Hamilton, Jacobi) del campo e.m.**



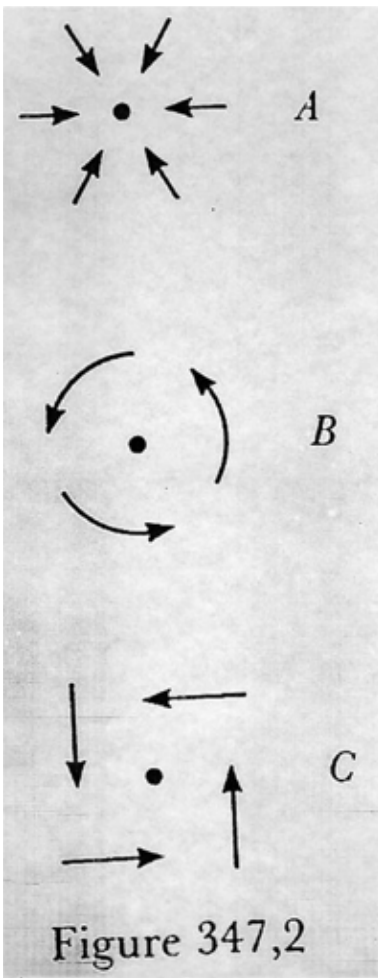
Diversi modelli di distribuzione della carica e di polarizzazione: a) fluido elettrico convenzionale; b) Faraday-Maxwell; c) Mossotti-Thomson



Dispositivo per illustrare l'analogia dinamica della mutua induzione tra correnti. Un modo per illustrare le equazioni di Lagrange per sistemi accoppiati induttivamente.

P e Q, due dischi che rappresentano la corrente primaria e secondaria. Connessi da un sistema differenziale. Il volano nel centro può essere interpretato come il campo generato dal moto nei circuiti P e Q. Q è frenato da un elastico: quando P parte o si arresta, Q si muove in senso opposto a P, quando P si muove uniformemente Q resta fermo.

L'effetto da un nucleo di ferro nella mutua induzione si ottiene aumentando il momento di inerzia.



ii Introduzione dei vettori e degli operatori vettoriali (∇ - nebel o nablium antico strumento musicale ebraico)

A - "convergenza", $\nabla \cdot$

B - "rotore", $\nabla \times$

C - "gradiente" ∇

∇^2 - I propose to call $\nabla^2 q$ the concentration of q at the point P , because it indicates the excess of the value of q at that point over its mean value in the neighbourhood of the point.

Abbiamo visto che le espressioni matematiche per l'azione elettrodinamica conducono, nel pensiero di Gauss, alla convinzione che una teoria della propagazione dell'azione elettrica nel tempo dovrebbe essere la "chiave di volta" dell'elettrodinamica.

Ma siamo incapaci di concepire la propagazione nel tempo eccetto che nel caso in cui la riferiamo a un flusso di sostanza materiale nello spazio o alla propagazione di una condizione di moto o di tensione in un mezzo già esistente nello spazio.

Nella teoria di C. Neumann, la nozione matematica chiamata Potenziale, che siamo incapaci di concepire come sostanza materiale, è supposta venir proiettata da una particella all'altra, in un modo che è indipendente dal mezzo, e che, come Neumann stesso ha messo in evidenza, è radicalmente diverso da quello della propagazione della luce [la velocità di trasmissione del potenziale non è, come quella della luce, costante relativamente all'etere o allo spazio, ma piuttosto come quella di un proiettile, costante relativamente alla velocità della particella emittente all'istante dell'emissione].

Nelle teorie di Riemann e Betti l'azione sembrerebbe propagarsi in modo più simile a quello della luce.

Ma in tutte queste teorie sorge naturale una domanda: se qualcosa si trasmette da una particella a un'altra posta ad una certa distanza quale è la condizione di questo qualcosa dopo che ha lasciato la prima particella e prima di aver raggiunto l'altra?

Se questo qualcosa è l'energia potenziale delle due particelle, come nella teoria di Neumann, come dobbiamo concepire questa energia come esistente in un punto dello spazio che non coincida con la posizione di nessuna delle due particelle?

Di fatto ogni qual volta l'energia è trasmessa da un corpo a un altro nel tempo ci deve essere un mezzo o sostanza in cui l'energia esiste dopo aver lasciato un corpo e prima di aver raggiunto l'altro, perchè l'energia, come ha sottolineato Torricelli, "è una quintessenza di natura così sottile da non poter essere contenuta in alcun recipiente eccetto nell'intima sostanza delle cose materiali".

Quindi tutte queste teorie conducono a concepire un mezzo nel quale la propagazione abbia luogo, e se ammettiamo questo mezzo come ipotesi, penso che questo mezzo dovrebbe occupare una posizione preminente nelle nostre indagini, e che dovremmo cercare di costruire una rappresentazione mentale di tutti i dettagli della sua azione, e questo è stato il mio costante obiettivo in questo trattato.

[Maxwell, Treatise, 1873]

Ancora due parole sull'etere...

In una ordinaria cella campanaria, ogni campana ha una corda che scende attraverso un buco del pavimento nella stanza dei campanari.

Ma supponiamo che ogni corda, invece di agire su una sola campana, contribuisca al movimento di molti pezzi dell'ingranaggio, e che il moto di ogni pezzo sia determinato non dal movimento di una sola corda, ma da quello di diverse, e supponiamo, inoltre, che tutto l'ingranaggio sia silenzioso e completamente sconosciuto agli uomini che tirano le corde, che possono soltanto vedere fino ai buchi nel pavimento sovrastante.

Supponendo tutto questo, quale è il compito scientifico degli uomini che stanno sotto?

Essi hanno il pieno controllo delle corde, ma di niente altro. Essi possono dare ad ogni corda qualunque posizione e qualunque velocità, e possono stimare il suo momento fermando tutte le corde nello stesso istante, e provando che tipo di strappo dà ogni corda. Se si danno la pena di accertare quanto lavoro devono fare per tirare giù le corde a un insieme determinato di posizioni, e di esprimere tale lavoro nei termini di queste posizioni, essi avranno trovato l'energia potenziale del sistema nei termini delle coordinate conosciute. Se poi trovano lo strappo su una qualunque corda derivante da una velocità unitaria comunicata a sé stessa o a ogni altra corda, essi potranno esprimere l'energia cinetica nei termini delle coordinate e delle velocità.

Questi dati sono sufficienti per determinare il moto di ognuna delle corde quando su questa e su tutte le altre si agisce con forze date. Questo è tutto quello che gli uomini che stanno alle corde possono sapere. Se l'ingranaggio di cui sopra ha più gradi di libertà di quante siano le corde, le coordinate che esprimono questi gradi di libertà devono essere ignorate. Non c'è niente da fare. [1879, recensione TT']

Dopo Maxwell

- Formulazione moderna delle equazioni (i maxwelliani: FitzGerald, Heaviside, Poynting - 1880-1900)
- Scoperta dell'elettrone (J.J. Thomson - 1897)
- Relatività Ristretta (Einstein 1905)